高校应用数学学报
2014, 29(2): 171-179

# Panel数据模型中方差分量的广义$p$值检验

赵 静[1,2], 程维虎[1], 吴密霞[1], 赵 延[1]

(1. 北京工业大学 应用数理学院, 北京 100022;

2. 滨州学院 数学与信息科学系, 山东滨州 256603)

**摘 要**: 利用广义$p$值和广义置信区间的概念构造含有四个随机效应的Panel数据模型中方差分量的几种新的精确检验和置信区间, 并讨论它们在尺度变换下的不变性. 模拟结果表明, 这种检验能很好地控制检验水平.

**关键词**: 随机效应; 广义$p$值; 广义置信区间; 方差分量

**中图分类号**: O212.1

**文献标识码**: A  **文章编号**: 1000-4424(2014)02-0171-09

## §1 引 言

考虑含有两个随机效应和交互作用的Panel模型

$$y_{ijt} = \beta_0 + x_{ijt}^{'}\beta + \mu_i + \nu_j + \gamma_{ij} + \varepsilon_{ijt}, i = 1, \cdots, a, j = 1, \cdots, b, t = 1, \cdots, c, \tag{1}$$

这里$\beta_0$为截距; $\beta = (\beta_1, \cdots, \beta_k)'$为回归系数; $\mu_i, \nu_j$为随机效应; $\gamma_{ij}$为交互效应; $\varepsilon_{ijt}$为随机误差. 假定所有的$\mu_i, \nu_j, \gamma_{ij}, \varepsilon_{ijt}$都相互独立, 且

$$\mu_i \sim N(0, \sigma_\mu^2), \nu_j \sim N(0, \sigma_\nu^2), \gamma_{ij} \sim N(0, \sigma_\gamma^2), \varepsilon_{ijt} \sim N(0, \sigma_e^2).$$

记$y = (y_{111}, \ldots, y_{11c}, \ldots, y_{ab1}, \cdots, y_{abc})', X = (x_{111}, \ldots, x_{11c}, \ldots, x_{ab1}, \cdots, x_{abc})', \mu = (\mu_1, \ldots, \mu_a)', \nu = (\nu_1, \ldots, \nu_b)', \gamma = (\gamma_{11}, \ldots, \gamma_{ab})', \varepsilon = (\varepsilon_{111}, \ldots, \varepsilon_{abc})'$. 则模型(1)可写成矩阵形式

$$y = 1_{abc}\beta_0 + X\beta + (I_a \otimes 1_b \otimes 1_c)\mu + (1_a \otimes I_b \otimes 1_c)\nu + (I_a \otimes I_b \otimes 1_c)\gamma + \varepsilon, \tag{2}$$

这里$1_a$表示分量全为1的$a$维列向量, $I_a$表示$a$阶单位阵, $\otimes$符号表示Kronecker乘积.

在实际应用中, 关于方差分量假设检验和区间估计问题的研究, 是一个颇受统计学家关注的课题. 基于Tusi和Weerahandi[1]和Weerahandi[2]分别提出了广义$p$-值(generalized $p$ value)和

收稿日期: 2013-06-21  修回日期: 2013-11-18

基金项目: 国家自然科学基金(11171011); 北京市自然科学基金(1132007); 北京工业大学京华人才资助项目; 北京工业大学应用数理学院数学和统计学科科技发展基金; 北京市教委科技项目(km201410005011); 滨州学院科学基金(BZXYL1105); 北京工业大学研究生科技基金(ykj-2013-9667)

广义置信区间(generalized confidence interval)的概念, Weerahandi[3]针对混合模型中方差分量的单边假设检验问题, 建立了一种检验方法. Zhou和Mathew[4]分别考虑了混合模型中单个方差分量的显著性检验问题和两个方差分量的比较问题. Li和Li[5]在非平衡随机效应模型中, 构造了方差分量和的置信区间. Mathew和Webb[6]针对与分析军队检验数据相关的混合模型, 考虑了方差分量的假设检验和区间估计问题. Ofversten[7]利用正交变换建立了非平衡线性混合模型中方差分量的精确检验. Ye和Wang[8]对平衡数据下一般随机效应模型的单个方差分量构造出精确检验和置信区间, 并将结果推广至两个独立平衡模型方差分量的比较. Ma和Wang[9]对含有两个方差分量的随机效应为任意阵的线性混合模型的方差分量单边检验问题给出了精确的F检验和基于广义$p$-值的检验.

Panel模型本质上是一种具有套误差结构(nested error structure)的线性回归模型, 它常出现在计量经济, 试验设计, 抽样调查等问题中. 对于Panel模型中的假设检验问题, Ye和Wang在[10]中讨论了只有一个随机效应$\mu_i$时方差分量的任意线性组合的精确检验和置信区间. Cheng和Wang在[11]中讨论了无交互效应即$\gamma_{ij}=0$时模型中方差分量的精确检验和置信区间并讨论了检验的不变性. 本文将利用广义$p$值和广义置信区间的概念对此具有两个随机效应和交互效应的模型给出其方差分量的各类单边假设检验问题的精确检验, 构造参数的置信区间, 并讨论有关统计性质.

## §2 广义$p$值和广义置信区间

设$X$为分布依赖于参数$(\theta,\eta)$的随机变量, 其中$\theta$为检验参数, $\eta$为多余参数, 且$\eta$可以为参数向量, 假如要检验假设

$$H_0:\theta\le\theta_0 \quad\longleftrightarrow\quad H_1:\theta>\theta_0, \tag{3}$$

这个$\theta_0$为预先给定值.令$x$为$X$的观测值, 定义一个广义检验变量$T_1(X;x,\theta,\eta)$,它满足如下条件:

(a) $T_1(X;x,\theta_0,\eta)$的分布与多余参数无关;

(b) $T_1(X;x,\theta,\eta)$的观测值$T_1(x;x,\theta,\eta)$与任何未知参数无关;

(c) 对于固定的$x$和$\eta$, $T_1(X;x,\theta,\eta)$的分布关于$\theta$随机单调增(stochastically increasing)或随机单调减(stochastically decreasing). (4)

当$T_1(X;x,\theta,\eta)$的分布是关于$\theta$随机单调增时, 对于假设检验问题(3), 广义$p$-值定义为

$$P(T_1(X;x,\theta,\eta)\ge t\mid\theta=\theta_0),$$

这里$t=T_1(x;x,\theta,\eta)$. 当$T_1(X;x,\theta,\eta)$的分布是关于$\theta$随机单调减的, 对于假设检验问题(3), 广义$p$-值定义为$P(T_1(X;x,\theta,\eta)\le t\mid\theta=\theta_0)$.

为了构造参数$\theta$的置信区间, 给出一个广义枢轴量$T_2(X;x,\theta,\eta)$, 它满足如下条件:

(a)$T_2(X;x,\theta,\eta)$的分布与任何未知参数无关;

(b)$T_2(X;x,\theta,\eta)$的观测值, 即$T_2(x;x,\theta,\eta)$与多余参数无关. (5)

由条件(5), 可以利用$T_2(X;x,\theta,\eta)$的百分位数$T_2(1-\alpha)$来构造参数$\theta$的广义置信区间. 如: 当$T_2(x;x,\theta,\eta)=\theta$时, 若$T_2(1-\alpha)$表示$T_2(X;x,\theta,\eta)$的第$100(1-\alpha)$百分位点, 则$T_2(1-\alpha)$就为$\theta$的广义置信上限, 同理可得$\theta$的广义置信下限和广义双边置信限. 详细讨论参见Tusi和Weerahandi[1]和Weerahandi[2].

## §3 模型分析

显然$y=(y_{111},\ldots,y_{11c},\ldots,y_{ab1,\cdots,y_{abc}})'$的协方差阵为

$$\Omega=\sigma_\mu^2 I_a\bigotimes J_b\bigotimes J_c+\sigma_\nu^2(J_a\bigotimes I_b\bigotimes J_c)+\sigma_\gamma^2 I_a\bigotimes I_b\bigotimes J_c+\sigma_e^2 I_{abc},$$

其中$J_a=1_a1_a'$, 定义$\bar{J}_a=\frac{1}{a}J_a, n=abc$, 对$\Omega$进行谱分解, 容易证明

$$\Omega=\sum_{i=1}^4\lambda_i M_i+\lambda_0\bar{J}_n.$$

其中$\lambda_0=bc\sigma_\mu^2+ac\sigma_\nu^2+c\sigma_\gamma^2+\sigma_e^2, \lambda_1=bc\sigma_\mu^2+c\sigma_\gamma^2+\sigma_e^2, \lambda_2=ac\sigma_\nu^2+c\sigma_\gamma^2+\sigma_e^2, \lambda_3=c\sigma_\gamma^2+\sigma_e^2, \lambda_4=\sigma_e^2$, 相应地, $M_1=(I_a-\bar{J}_a)\otimes\bar{J}_b\otimes\bar{J}_c, M_2=\bar{J}_a\otimes(I_b-\bar{J}_b)\otimes\bar{J}_c, M_3=(I_a-\bar{J}_a)\otimes(I_b-\bar{J}_b)\otimes\bar{J}_c, M_4=I_a\otimes I_b\otimes(I_c-\bar{J}_c)$.

**引理3.1**　1)$M_1,M_2,M_3,M_4,\bar{J}_n$都是对称幂等阵且两两相互正交;

2)$M_1,M_2,M_3,M_4,\bar{J}_n$的秩分别为$a-1,b-1,(a-1)(b-1),ab(c-1),1$.

3)$M_1,M_2,M_3,M_4,\bar{J}_n$的和为单位阵.

由$M_1,M_2,M_3,M_4,\bar{J}_n$的定义, 引理3.1易证.

分别用$M_1,M_2,M_3,M_4$左乘原模型, 有

$$\begin{cases} y_1=M_1y=M_1X\beta+M_1u=M_1X\beta+u_1,\\ y_2=M_2y=M_2X\beta+M_2u=M_2X\beta+u_2,\\ y_3=M_3y=M_3X\beta+M_3u=M_3X\beta+u_3,\\ y_4=M_4y=M_4X\beta+M_4u=M_4X\beta+u_4,\end{cases}\tag{6}$$

其中$\mathrm{E}u_i=M_i\mathrm{E}u=0, \mathrm{Cov}(u_i)=\lambda_iM_i, i=1,2,3,4$. 假定$(X'M_iX)^{-1}$均存在, 这在实际观测中是很容易满足的. 在(6)各子模型中可得到$\beta$的最小二乘估计为

$$\hat{\beta}_i=(X'M_iX)^{-1}X'M_iy,\qquad i=1,2,3,4.$$

由最小二乘统一理论知$\hat{\beta}_i$分别为上述四个模型中$\beta$的最佳线性无偏估计, 且

$$\mathrm{Cov}(\hat{\beta}_i)=\lambda_i(X'M_iX)^{-1}=\Sigma_i(\lambda_i), i=1,2,3,4.$$

利用残差估计$\hat{u}_i=M_iy-M_iX\hat{\beta}_i, i=1,2,3,4$. 得到$\lambda_i$的无偏估计

$$\hat{\lambda}_i=\frac{\hat{u}_i{}'M_i^-\hat{u}_i}{n_i}=\frac{y'(M_i-M_iX(X'M_iX)^{-1}X'M_i)y}{n_i},$$

其中$n_i=rk(M_i)-k$, 且有

$$V_i=\frac{n_i\hat{\lambda}_i}{\lambda_i}\sim\chi_{n_i}^2, i=1,2,3,4.$$

**引理3.2**　$\hat{\beta}_1,\hat{\beta}_2,\hat{\beta}_3,\hat{\beta}_4,\hat{\lambda}_1,\hat{\lambda}_2,\hat{\lambda}_3,\hat{\lambda}_4$相互独立.

$\hat{\beta}_i,\hat{\lambda}_i$分别为$y$的线性型和二次型, 而$y$服从多元正态分布. 依据王松桂等[12]中的相关结论可以证明引理.

下面将利用这里获得的优良估计来构造方差分量的精确检验和置信区间.

## §4 方差分量的精确检验和置信区间

这一部分将讨论模型(1)中方差分量的几种假设问题基于广义$p$值理论的精确检验和置信区间, 并探讨其有关性质. 本节沿用§3中参数估计的结果和记号.

首先考虑模型(1)中第一个随机效应的单边假设检验问题

$$H_0:\sigma_\mu^2\le c_0 \leftrightarrow H_1:\sigma_\mu^2>c_0, \tag{7}$$

其中$c_0$为一已知正数. 记$\hat\lambda_i^*$为$\hat\lambda_i, i=1,2,3,4$的观测值, 定义

$$T_1=\frac{n_1\hat\lambda_1}{\lambda_1}-\frac{n_1\hat\lambda_1^*}{bc\sigma_\mu^2+\lambda_3\hat\lambda_3^*\hat\lambda_3^{-1}}=V_1-\frac{n_1\hat\lambda_1^*}{bc\sigma_\mu^2+n_3\hat\lambda_3^*V_3^{-1}}. \tag{8}$$

显然, $T_1$的观测值$t_1=0$与未知参数无关; 由$\hat\lambda_1$ , $\hat\lambda_3$独立知

$$V_1=\frac{n_1\hat\lambda_1}{\lambda_1}\sim\chi_{n_1}^2, V_3=\frac{n_3\hat\lambda_3}{\lambda_3}\sim\chi_{n_3}^2$$

相互独立, 故$T_1$的分布与冗余参数无关; 且由$T_1$的表达式可见, $T_1$关于$\sigma_\mu^2$随机单调增. 因此对假设问题(7), $T_1$定义了一个广义检验变量. 利用$T_1$给出如下广义$p$值

$$\begin{aligned} p_1 &= P(T_1\ge 0\mid\sigma_\mu^2=c_0)=P\left(V_1\ge\frac{n_1\hat\lambda_1^*}{bcc_0+n_3\hat\lambda_3^*V_3^{-1}}\right)\\ &= 1-\mathrm{E}_{V_3}\left[F_{\chi_{n_1}^2}\left(\frac{n_1\hat\lambda_1^*}{bcc_0+n_3\hat\lambda_3^*V_3^{-1}}\right)\right]. \end{aligned} \tag{9}$$

其中$\mathrm{E}_{V_3}$表示对$V_3$求期望, $F_{\chi_{n_1}^2}$表示自由度为$n_1$的卡方分布的分布函数.

考虑尺度变换

$$\begin{aligned} &(\beta,\lambda_1,\lambda_3)\longrightarrow(a\beta,a\lambda_1,a\lambda 3),\\ &(\hat\beta,\hat\lambda_1,\hat\lambda_3)\longrightarrow(a\hat\beta,a\hat\lambda_1,a\hat\lambda_3), \qquad (a>0) \end{aligned} \tag{10}$$

虽然广义检验变量$T_1$在尺度变换(10)下保持不变, 但假设检验问题(7)本身不是尺度变换(10)下的不变检验问题. 考虑与之等价的假设

$$H_0:\theta_\mu\le\theta_0 \leftrightarrow H_1:\theta_\mu>\theta_0, \tag{11}$$

这里$\theta_\mu=\frac{\sigma_\mu^2}{\hat\lambda_3^*}, \theta_0=\frac{c_0}{\hat\lambda_3^*}$, 通过如下尺度变换

$$\begin{aligned} &(\beta,\lambda_1,\theta_\mu)\longrightarrow(a\beta,a\lambda_1,\theta_\mu),\\ &(\hat\beta,\hat\lambda_1,\hat\lambda_3)\longrightarrow(a\hat\beta,a\hat\lambda_1,a\hat\lambda_3), \qquad (a>0) \end{aligned} \tag{12}$$

则假设检验问题(11)为不变检验问题, 其广义$p$值可表示为

$$\tilde{p_1}=1-\mathrm{E}_{V_3}\left[F_{\chi_{n_1}^2}\left(\frac{n_1\hat\lambda_1^*(\hat\lambda_3^*)^{-1}}{bc\theta_0+n_3V_3^{-1}}\right)\right]. \tag{13}$$

于是, 对假设检验问题(11), 在尺度变换(12)下, 基于(13)所定义的广义$p$值的检验方法为$p$不变检验.

下面来构造$\sigma_\mu^2$的广义置信区间, 定义

$$T_1^* = \frac{1}{bc}\left(\frac{\lambda_1\hat{\lambda}_1^*}{\hat{\lambda}_1} - \frac{\lambda_3\hat{\lambda}_3^*}{\hat{\lambda}_3}\right) = \frac{1}{bc}\left(\frac{n_1\hat{\lambda}_1^*}{V_1} - \frac{n_3\hat{\lambda}_3^*}{V_3}\right).$$

显然, $T_1^*$ 的观测值为$\sigma_\mu^2$, 与冗余参数无关, 由$V_1 \sim \chi_{n_1}^2, V_3 \sim \chi_{n_3}^2$相互独立知, $T_1^*$的分布与未知参数无关, 因而$T_1^*$为一广义枢轴量. 利用$T_1^*$可得到$\sigma_\mu^2$的置信水平为$1-\alpha$的广义置信下限和广义置信上限分别为$T_1^*(\alpha)$和$T_1^*(1-\alpha)$. 这里, $T_1^*(\alpha)$和$T_1^*(1-\alpha)$分别表示$T_1^*$的$\alpha$和$1-\alpha$分位数. 对于$\sigma_\mu$的广义不变置信区间可利用下面的广义枢轴量$\widehat{T}_1^*$获得

$$\widehat{T}_1^* = \frac{1}{bc\hat{\lambda}_3^*}\left(\frac{\lambda_1\hat{\lambda}_1^*}{\hat{\lambda}_1} - \frac{\lambda_3\hat{\lambda}_3^*}{\hat{\lambda}_3}\right).$$

对于第二个随机效应和交互效应以及随机误差的单边假设检验问题

$$H_0: \sigma_\nu^2 \le c_0 \leftrightarrow H_1: \sigma_\nu^2 > c_0, \tag{14}$$

$$H_0: \sigma_\gamma^2 \le c_0 \leftrightarrow H_1: \sigma_\gamma^2 > c_0, \tag{15}$$

$$H_0: \sigma_e^2 \le c_0 \leftrightarrow H_1: \sigma_e^2 > c_0, \tag{16}$$

其中$c_0$为一已知正数. 类似于检验问题(7)定义

$$\begin{aligned}
T_2 &= \frac{n_2\hat{\lambda}_2}{\lambda_2} - \frac{n_2\hat{\lambda}_2^*}{ac\sigma_\nu^2 + \lambda_3\hat{\lambda}_3^*\hat{\lambda}_3^{-1}} = V_2 - \frac{n_2\hat{\lambda}_2^*}{ac\sigma_\nu^2 + n_3\hat{\lambda}_3^*V_3^{-1}},\\
T_3 &= \frac{n_3\hat{\lambda}_3}{\lambda_3} - \frac{n_3\hat{\lambda}_3^*}{c\sigma_\gamma^2 + \lambda_4\hat{\lambda}_4^*\hat{\lambda}_4^{-1}} = V_3 - \frac{n_3\hat{\lambda}_3^*}{c\sigma_\gamma^2 + n_4\hat{\lambda}_4^*V_4^{-1}},\\
T_4 &= \frac{\sigma_e^2\hat{\lambda}_4^*}{\hat{\lambda}_4} - \sigma_e^2 = \frac{n_4\hat{\lambda}_4^*}{V_4} - \sigma_e^2.
\end{aligned}$$

这里$\hat{\lambda}_i^*$表示$\hat{\lambda}_i, i=1,2,3,4$的观测值. 同样可验证$T_2, T_3, T_4$为广义检验变量. 由此可分别得到检验问题(14)-(16)的广义$p$值计算式

$$\begin{aligned}
p_2 &= P(T_2 \ge t_2 \mid \sigma_\nu^2 = c_0) = 1 - \mathrm{E}_{V_3}\left[F_{\chi_{n_2}^2}\left(\tfrac{n_2\hat{\lambda}_2^*}{acc_0 + n_3\hat{\lambda}_3^*V_3^{-1}}\right)\right],\\
p_3 &= P(T_3 \ge t_3 \mid \sigma_\gamma^2 = c_0) = 1 - \mathrm{E}_{V_4}\left[F_{\chi_{n_3}^2}\left(\tfrac{n_3\hat{\lambda}_3^*}{cc_0 + n_4\hat{\lambda}_4^*V_4^{-1}}\right)\right],\\
p_4 &= P(T_4 \le 0 \mid \sigma_e^2 = c_0) = 1 - F_{\chi_{n_4}^2}\left(\tfrac{n_4\hat{\lambda}_4^*}{c_0}\right).
\end{aligned}$$

显然, $p_4$ 与卡方检验是等价的. 对于$\sigma_\nu^2$, $\sigma_\gamma^2, \sigma_e^2$的广义置信区间, 类似可利用如下广义枢轴量来构造

$$T_2^* = \frac{1}{ac}\left(\frac{\lambda_2\hat{\lambda}_2^*}{\hat{\lambda}_2} - \frac{\lambda_3\hat{\lambda}_3^*}{\hat{\lambda}_3}\right), \qquad T_3^* = \frac{1}{c}\left(\frac{\lambda_3\hat{\lambda}_3^*}{\hat{\lambda}_3} - \frac{\lambda_4\hat{\lambda}_4^*}{\hat{\lambda}_4}\right), \qquad T_4^* = \frac{\lambda_4\hat{\lambda}_4^*}{\hat{\lambda}_4}.$$

对于尺度变换下的不变检验和不变置信区间的构造, 类$\sigma_\mu^2$的情形, 不再详述.

最后讨论方差分量的线性组合的单边假设检验问题

$$H_0: l\sigma_\mu^2 + m\sigma_\nu^2 + n\sigma_\gamma^2 + q\sigma_e^2 \le d_0 \leftrightarrow H_1: l\sigma_\mu^2 + m\sigma_\nu^2 + n\sigma_\gamma^2 + q\sigma_e^2 > d_0, \tag{17}$$

其中$l, m, n, q \in R, d_0$为一给定值.(17)是许多有实际意义的假设检验问题一般表示形式. 例如, 取$l = 1, m = -1, n = q = d_0 = 0$, 要检验的就是$\sigma_\mu^2 \le \sigma_\nu^2$; 如果取$l = m = 1, n = -1, q = 0, d_0 = 0$, 要检验的就是$\sigma_\mu^2 + \sigma_\nu^2 \le \sigma_\gamma^2$; 特别的, 分别取$l, m, n, q$中任一个为1, 其余为0, (17)就归结为前面讨论的四种假设问题. 下面对此一般性检验问题(17)建立广义$p$值检验, 定义

$$\begin{aligned} T_5 &= \left[\tfrac{l}{bc}\tfrac{\lambda_1\hat{\lambda}_1^*}{\hat{\lambda}_1} + \tfrac{m}{ac}\tfrac{\lambda_2\hat{\lambda}_2^*}{\hat{\lambda}_2} + \left(\tfrac{n}{c} - \tfrac{l}{bc} - \tfrac{m}{ac}\right)\tfrac{\lambda_3\hat{\lambda}_3^*}{\hat{\lambda}_3} + \left(q - \tfrac{n}{c}\right)\tfrac{\lambda_4\hat{\lambda}_4^*}{\hat{\lambda}_4}\right] - (l\sigma_\mu^2 + m\sigma_\nu^2 + n\sigma_\gamma^2 + q\sigma_e^2) \\ &= \left[\tfrac{l}{bc}\tfrac{n_1\hat{\lambda}_1^*}{V_1} + \tfrac{m}{ac}\tfrac{n_2\hat{\lambda}_2^*}{V_2} + \left(\tfrac{n}{c} - \tfrac{l}{bc} - \tfrac{m}{ac}\right)\tfrac{n_3\hat{\lambda}_3^*}{V_3} + \left(q - \tfrac{n}{c}\right)\tfrac{n_4\hat{\lambda}_4^*}{V_4}\right] - (l\sigma_\mu^2 + m\sigma_\nu^2 + n\sigma_\gamma^2 + q\sigma_e^2), \end{aligned} \tag{18}$$

则有: $T_5$的观测值$t_5 = 0$与未知参数无关;

$$V_i = \frac{n_i\hat{\lambda}_i}{\lambda_i} \sim \chi_{n_i}^2, i = 1, 2, 3, 4$$

相互独立, 故$T_5$的分布与冗余参数无关; $T_5$关于$l\sigma_\mu^2 + m\sigma_\nu^2 + n\sigma_\gamma^2 + q\sigma_e^2$随机单调减, 故$T_5$为一广义检验变量, 基于$T_5$的广义$p$值为

$$\begin{aligned} &p_5 = P(T_5 \le 0 \mid l\sigma_\mu^2 + m\sigma_\nu^2 + n\sigma_\gamma^2 + q\sigma_e^2 = d_0) \\ &= P\left(\tfrac{l}{bc}\tfrac{n_1\hat{\lambda}_1^*}{V_1} + \tfrac{m}{ac}\tfrac{n_2\hat{\lambda}_2^*}{V_2} + \left(\tfrac{n}{c} - \tfrac{l}{bc} - \tfrac{m}{ac}\right)\tfrac{n_3\hat{\lambda}_3^*}{V_3} + \left(q - \tfrac{n}{c}\right)\tfrac{n_4\hat{\lambda}_4^*}{V_4} \le d_0\right) \\ &= P\left(V_1 \ge \tfrac{l}{bc}n_1\hat{\lambda}_1^*\left(d_0 - \tfrac{m}{ac}\tfrac{n_2\hat{\lambda}_2^*}{V_2} - \left(\tfrac{n}{c} - \tfrac{l}{bc} - \tfrac{m}{ac}\right)\tfrac{n_3\hat{\lambda}_3^*}{V_3} - \left(q - \tfrac{n}{c}\right)\tfrac{n_4\hat{\lambda}_4^*}{V_4}\right)^{-1}\right) \\ &= 1 - \mathrm{E}_{V_2,V_3,V_4}\left[F_{\chi_{n_1}^2}\left(\tfrac{l}{bc}n_1\hat{\lambda}_1^*\left(d_0 - \tfrac{m}{ac}\tfrac{n_2\hat{\lambda}_2^*}{V_2} - \left(\tfrac{n}{c} - \tfrac{l}{bc} - \tfrac{m}{ac}\right)\tfrac{n_3\hat{\lambda}_3^*}{V_3} - \left(q - \tfrac{n}{c}\right)\tfrac{n_4\hat{\lambda}_4^*}{V_4}\right)^{-1}\right)\right]. \end{aligned}$$

为构造$l\sigma_\mu^2 + m\sigma_\nu^2 + n\sigma_\gamma^2 + q\sigma_e^2$的置信区间, 定义

$$T_5^* = \frac{l}{bc}\frac{\lambda_1\hat{\lambda}_1^*}{\hat{\lambda}_1} + \frac{m}{ac}\frac{\lambda_2\hat{\lambda}_2^*}{\hat{\lambda}_2} + \left(\frac{n}{c} - \frac{l}{bc} - \frac{m}{ac}\right)\frac{\lambda_3\hat{\lambda}_3^*}{\hat{\lambda}_3} + \left(q - \frac{n}{c}\right)\frac{\lambda_4\hat{\lambda}_4^*}{\hat{\lambda}_4}. \tag{19}$$

由上面分析可知$T_5^*$的分布与未知参数无关, $T_5^*$的观测值$t_5^* = l\sigma_\mu^2 + m\sigma_\nu^2 + n\sigma_\gamma^2 + q\sigma_e^2$与冗余参数无关, 故$T_5^*$为一个广义枢轴量. 由$T_5^*$分位点可构造$l\sigma_\mu^2 + m\sigma_\nu^2 + n\sigma_\gamma^2 + q\sigma_e^2$的广义置信区间. 如$T_5^*(1-\alpha)$为$T_5^*$的$1-\alpha$分位点, 则$T_5^*(1-\alpha)$可作为$l\sigma_\mu^2 + m\sigma_\nu^2 + n\sigma_\gamma^2 + q\sigma_e^2$的置信水平为$1-\alpha$的广义置信上限, 广义置信下限和双边置信限类似可得.

## §5 数值模拟

对于方差分量, 给出了几种由广义$p$值和广义置信区间确定的检验方法和置信区间. 然而, 这些检验方法和置信区间的实际显著性水平和实际置信水平与多余参数选择有关, 所以有必要从数值上研究其功效, 覆盖概率等统计性质. 在实际问题中, 可能对随机效应对应的方差分量$\sigma_\mu^2$的检验更感兴趣, 故本节利用Monte Carlo方法先对假设检验(7), 即假设检验(17)中取$l = 1, m = n = q = 0$的特殊情况, 用本文提到的两种检验变量$T_1, T_5$进行检验并给出部分模拟

结果并进行比较. 对假设检验问题(14)-(16)的检验与(7)类似, 这是因为他们的构造思想完全一样, 故本文略去具体过程. 其次, 对一般情形的假设检验(17)(不妨设$l = m = n = q = 1$)进行了检验. 不失一般性, 取$a = 15, b = 10, c = 5, \sigma_\nu^2 = 1.5, \sigma_\gamma^2 = 1, \sigma_e^2 = 1$, 以及名义显著性水平与名义置信水平分别为5% 与95%.

表1给出了假设检验(7)下由$p_1$和$p_5$确定的两种检验方法功效比较, 其中划线数据为犯第一类错误的概率. 易见, 这两种检验的实际显著性水平与名义显著性水平很接近, 说明两种检验都较好地控制犯第一类错误的概率, 且两者功效也相差不大. 但可以看出, 当$\sigma_\mu^2$较大时, $p_5$的功效一致优于$p_1$.

因为由$T_1^*$和$T_5^*$给出的置信区间本质上是一样的, 故表2给出了假设检验问题(7)下基于$T_5^*$的区间覆盖概率和区间长度. 从表中可以看到, 当$\sigma_\mu^2$较大时, 基于$T_5^*$的广义置信区间包含参数的概率在$1 - \alpha = 0.95$附近波动.

表3, 表4分别给出了假设检验(17)(不妨设$l = m = n = q = 1$)基于$T_5$和$T_5^*$的功效和覆盖概率. 可以看到, 基于$T_5$构造的广义$p$值检验能较好地控制犯第一类错误的概率, 其中划线数据为犯第一类错误的概率. 功效为待检验参数的增函数且功效增长较为理想. 广义置信区间包含参数的概率在$1 - \alpha = 0.95$附近波动. 因此广义$p$ 值方法用于解决此类问题具有一定的可行性.

表1 假设检验问题(7)下基于$T_1$和$T_5$的两种方法功效比较($c_0 = 0.3$)

| $k$ | $p_i$ | $\sigma_\mu^2$ 0.3 | 0.5 | 0.7 | 0.9 | 1.2 | 1.5 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 2 | $p_1$ | <u>0.0528</u> | 0.2855 | 0.5020 | 0.7125 | 0.8790 | 0.9360 |
|  | $p_5$ | <u>0.0500</u> | 0.2840 | 0.5640 | 0.7535 | 0.8880 | 0.9465 |
| 3 | $p_1$ | <u>0.0521</u> | 0.2820 | 0.5130 | 0.6784 | 0.8410 | 0.9165 |
|  | $p_5$ | <u>0.0530</u> | 0.2745 | 0.5340 | 0.7065 | 0.8685 | 0.9415 |
| 4 | $p_1$ | <u>0.0470</u> | 0.2455 | 0.4785 | 0.6245 | 0.8195 | 0.9080 |
|  | $p_5$ | <u>0.0530</u> | 0.2635 | 0.5415 | 0.6860 | 0.8580 | 0.9130 |

表2 假设检验问题(7)下基于$T_5^*$的区间覆盖概率和区间长度

| $k$ | $\sigma_\mu^2$ | 覆盖概率 | 区间长度 | $\sigma_\mu^2$ | 覆盖概率 | 区间长度 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 2 | 0.3 | 0.6460 | 1.4823 | 0.9 | 0.9095 | 2.3214 |
|  | 0.5 | 0.7720 | 2.4124 | 1.2 | 0.9615 | 2.5184 |
|  | 0.7 | 0.9023 | 2.7640 | 1.5 | 0.9640 | 2.8690 |
| 3 | 0.3 | 0.6820 | 1.0933 | 0.9 | 0.9615 | 2.3286 |
|  | 0.5 | 0.7953 | 1.2933 | 1.2 | 0.9680 | 3.1914 |
|  | 0.7 | 0.9165 | 1.4354 | 1.5 | 0.9755 | 3.9080 |
| 4 | 0.3 | 0.7223 | 1.5415 | 0.9 | 0.9665 | 2.4637 |
|  | 0.5 | 0.8260 | 1.6849 | 1.2 | 0.9780 | 4.7601 |
|  | 0.7 | 0.9220 | 1.9780 | 1.5 | 0.9820 | 3.4512 |

表3 假设检验问题(17)下基于$T_5$的广义$p$ 值检验的功效

| $k$ | $c_0$ | $\sigma_\mu^2$ 0.7 | 0.9 | 1.2 | 1.5 | 1.8 | 2.0 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 2 | 4.2 | $\underline{0.0628}$ | 0.1584 | 0.2544 | 0.2955 | 0.5987 | 0.6975 |
| | 4.4 | 0.0255 | $\underline{0.0567}$ | 0.1544 | 0.2787 | 0.4834 | 0.6765 |
| | 4.7 | 0.0145 | 0.0420 | $\underline{0.0625}$ | 0.2245 | 0.3865 | 0.6353 |
| 3 | 4.2 | $\underline{0.0521}$ | 0.1455 | 0.2075 | 0.2784 | 0.5500 | 0.6550 |
| | 4.4 | 0.0195 | $\underline{0.0635}$ | 0.1255 | 0.2160 | 0.3559 | 0.5890 |
| | 4.7 | 0.0132 | 0.0343 | $\underline{0.0560}$ | 0.2087 | 0.2787 | 0.5260 |
| 4 | 4.2 | $\underline{0.0515}$ | 0.1290 | 0.2245 | 0.2445 | 0.5340 | 0.6241 |
| | 4.4 | 0.0175 | $\underline{0.0565}$ | 0.1160 | 0.2070 | 0.2835 | 0.5775 |
| | 4.7 | 0.0115 | 0.0232 | $\underline{0.0485}$ | 0.1675 | 0.2245 | 0.5179 |

表4 假设检验问题(17)下基于$T_5^*$的广义置信区间的覆盖率($\alpha = 0.05$)

| $k$ | $\sigma_\mu^2$ 0.7 | 0.9 | 1.2 | 1.5 | 1.8 | 2.0 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 2 | 0.9455 | 0.9225 | 0.9485 | 0.9610 | 0.9722 | 0.9840 |
| 3 | 0.9250 | 0.9255 | 0.9345 | 0.9675 | 0.9710 | 0.9800 |
| 4 | 0.9235 | 0.9305 | 0.9655 | 0.9765 | 0.9780 | 0.9820 |

上述结果的具体模拟方法:

表1:

第一步随机产生1000个$T_1, T_5$的观测值, 统计其中小于0的比例, 此比例即为广义$p$ 值;

第二步重复第一步1000次, 对给定的水平$\alpha$, 统计小于$\alpha$的$p$ 值比例, 此比例即为拒绝原假设的比例, 即检验的功效.

表4:

第一步从$T_5^*$的分布产生1000个观测值, 由模型出发计算$t_5^*$, 若$t_5^*$介于$T_5^*$的$\frac{\alpha}{2}$与$1-\frac{\alpha}{2}$分位数之间, 记由$T_5^*$构造的广义置信域覆盖真值一次;

第二步重复第一步1000次, 统计覆盖的比例, 即为此广义置信区间的覆盖率.

表3与表1模拟方法类似, 表4与表2类似, 不再详述.

**参考文献:**


[1] Tsui K W, Weerahandi S. Generalized p-values in significance testing of hypothesis in the presence of nuisance parameters[J]. J Amer Statist Assoc, 1989, 84: 602-607.

[2] Weerahandi S. Generalized confidence intervals[J]. J Amer Statist Assoc, 1993, 88: 899-905.

[3] Weerahandi S. Testing variance components in mixed models with generalized $p$-values[J]. J Amer Statist Assoc, 1991, 86: 151-153.

[4] Zhou L P, Mathew T. Some tests for variance components using generalized $p$ values models[J]. Technometrics, 1994, 36: 394-402.

[5] Li X M, Li G Y. Confidence intervals on sum of variance components with unbalanced designs[J]. Commun Statist Theor Meth, 2005, 34: 833-845.
[6] Mathew T, Webb D W. Generalized $p$-values and confidence intervals for variance components: applications to army test and evaluation[J]. Technometrics, 2005, 47: 312-322.
[7] Ofversten J. Exact tests for variance components in unbalanced mixed liner models[J]. Biometrics, 1993, 49: 45-57.
[8] Ye R D, Wang S G. Generalized $p$ values and generalized confidence intervals for variance components in general random effects model with balanced data[J]. J Sys Sci Complex, 2007, 20(4): 572-584.
[9] 马铁丰, 王松桂. 线性混合模型方差分量的检验[J]. 高校应用数学学报, 2007, 22(4): 433-440.
[10] 叶仁道, 王松桂. Panel模型中的精确检验和置信区间[J]. 高校应用数学学报, 2008, 23(4): 415-426.
[11] 程靖, 王松桂, 岳荣先. Panel数据模型中方差分量的精确检验[J]. 应用概率统计, 2010, 26(1): 89-98.
[12] 王松桂, 史建红, 尹素菊, 等. 线性模型引论[M]. 北京: 科学出版社, 2004.

# Generalized $p$-value tests of variance components in panel data model

ZHAO Jing[1,2], CHENG Wei-hu[1], WU Mi-xia[1], ZHAO Yan[1]

(1. College of Applied Sciences, Beijing University of Technology, Beijing 100022, China;
2. Department of Mathematics and Information Science, Binzhou University, Binzhou 256603, China)

**Abstract**: In this paper, some new exact tests and confidence intervals of variance components in panel data model with four random effects are developed by using generalized $p$ value and generalized confidence interval. Invariance of these tests and confidence intervals under scale transformation is also discussed. It is showed that the generalized $p$ value is feasible and effective to resolve the hypothesis testing problems with nuisance parameters. Simulation shows that the test of generalized $p$ value is powerful with its testing size approximating nominal level.

**Keywords**: random effect; generalized $p$ value; generalized confidence interval; variance component

**MR Subject Classification**: 62F03; 62F25