第9章　线性混合效应模型

吴密霞

北京工业大学统计与数据科学系

E-mail: *wumixia@bjut.edu.cn*

教材

- 吴密霞, 王松桂. 2024. 线性模型引论（第2版）, 科学出版社.

本章概述

本章内容目录

- 随机因子和固定因子
- 固定效应的估计
- 随机效应的预测
- 方差分量的估计
- 检验

本章学习要求

初步了解线性混合效应模型结构、固定效应和方差分量的常见的几类参数估计和检验方法的思想. 感兴趣的读者可以细读本章以及相关参考文献.

随机因子和固定因子

例如, 对一家拥有几百家零售店的公司双因子研究.

- 该公司随机选取了其中七家店, 并要求每家店的员工对该店的管理进行评价. 被选中进行研究的七家商店构成了随机因子“零售商店"的七个水平. 在这种情况下，管理层不仅对所选七家商店的管理情况感兴趣, 还希望将结果推广到所有商店.
- 从每个商店的五个部门中随机抽取了八名员工，现在关注的是员工对部门和门店管理的评价. 部门是一个固定因子, 因为每家店只有五个部门，而人们关注的就是这五个部门.

随机因子和固定因子

- 固定效应: 人们感兴趣的是所选特定因子水平是否对因变量有影响的问题.
- 随机效应: 若因子水平是从潜在因子水平的更大总体中抽取出的一个样本, 研究的重点是因子水平潜在总体.

如何区分固定因子还是随机因子, 取决于研究的目标是水平效应还是潜在的水平总体.

- 固定效应模型: 所有因子都是固定因子的方差/协方差分析模型;
- 随机效应模型: 所有因子都是随机因子的方差分析模型;
- 混合效应模型: 部分因子是随机、部分因子是固定的方差或协方差分析模型.

考虑一般的线性混合效应模型

$$\boldsymbol{y} = \mathbf{X}\boldsymbol{\beta} + \mathbf{U}\boldsymbol{\xi} + \boldsymbol{e}, \tag{9.1}$$

其中$\boldsymbol{y}$为$n \times 1$观测向量, $\mathbf{X}$和$\mathbf{U}$分别为$n \times p$和$n \times q$的已知设计阵, $\boldsymbol{\beta}$为$p \times 1$ 未知参数向量, 称为固定效应, $\boldsymbol{\xi}$ 为$q \times 1$ 随机向量, 称为随机效应, $\boldsymbol{e}$ 为$n \times 1$ 随机误差. 一般假设$E(\boldsymbol{\xi}) = 0$, $E(\boldsymbol{e}) = \mathbf{0}$, $\mathrm{Cov}(\boldsymbol{\xi}) = \mathbf{D} \geq \mathbf{0}$, $\mathrm{Cov}(\boldsymbol{e}) = \mathbf{R} > \mathbf{0}$, 且$\boldsymbol{\xi}$和$\boldsymbol{e}$不相关, 即$\mathrm{Cov}(\xi, \boldsymbol{e}) = \mathbf{0}$. 于是$\boldsymbol{y}$的协方差阵为

$$\mathrm{Cov}(\boldsymbol{y}) = \boldsymbol{\Sigma} = \mathbf{UDU}' + \mathbf{R} > \mathbf{0}.$$

特例：方差分量模型

- 假设随机效应ξ 的协方差阵具有如下结构:

$$\mathbf{D} = \text{diag}(\sigma_1^2 \mathbf{I}_{q_1}, \cdots, \sigma_{k-1}^2 \mathbf{I}_{q_{k-1}}), \quad \text{Cov}(\boldsymbol{e}) = \mathbf{R} = \sigma_e^2 \mathbf{I}_n. \tag{9.2}$$

作相应的分块: $\mathbf{U} = (\mathbf{U}_1, \mathbf{U}_2, ..., \mathbf{U}_{k-1})$, $\boldsymbol{\xi} = (\boldsymbol{\xi}_1', \boldsymbol{\xi}_2', \cdots, \boldsymbol{\xi}_{k-1}')'$.
记$\mathbf{U}_k = \mathbf{I}_n$, $\boldsymbol{\xi}_k = \boldsymbol{e}$, $\sigma_k^2 = \sigma_e^2$. 则

$$\boldsymbol{y} = \mathbf{X}\boldsymbol{\beta} + \mathbf{U}_1\boldsymbol{\xi}_1 + \mathbf{U}_2\boldsymbol{\xi}_2 + \cdots + \mathbf{U}_k\boldsymbol{\xi}_k, \tag{9.3}$$

其中$\text{Cov}(\boldsymbol{y}) = \sum_{i=1}^{k} \sigma_i^2 \mathbf{U}_i \mathbf{U}_i' \triangleq \boldsymbol{\Sigma}(\boldsymbol{\sigma}^2)$, 这里$\boldsymbol{\sigma}^2 = (\sigma_1^2, \cdots, \sigma_k^2)'$.
文献中称σ_i^2为方差分量 (variance component), 相应地称模型(9.3)为方差分量模型.

固定效应的估计

- 暂视随机效应ξ和随机误差e的协方差阵$\mathbf{D}$和$\mathbf{R}$已知, 则对任意的可估函数$c'\beta$, 它的BLU估计为

$$c'\beta^* = c'(\mathbf{X}'\Sigma^{-1}\mathbf{X})^{-}\mathbf{X}'\Sigma^{-1}y, \tag{9.4}$$

其中$c \in \mathcal{M}(\mathbf{X}')$, $\beta^* = (\mathbf{X}'\Sigma^{-1}\mathbf{X})^{-}\mathbf{X}'\Sigma^{-1}y$ 为β的广义LS解.

- 用$\mathbf{D}$的估计$\widehat{\mathbf{D}}$ 和$\widehat{\mathbf{R}}$ 代替, 得到$c'\beta$的两步估计

$$c'\tilde{\beta}(\widehat{\Sigma}) = c'(\mathbf{X}'\widehat{\Sigma}^{-1}\mathbf{X})^{-}\mathbf{X}'\widehat{\Sigma}^{-1}y. \tag{9.5}$$

其中,

$$\widehat{\Sigma} = \mathbf{U}\widehat{\mathbf{D}}\mathbf{U}' + \widehat{\mathbf{R}}$$

- 若协方差阵$\mathbf{D}$满足(9.2)的结构, 即模型(9.3)下, 则$\boldsymbol{c}'\beta$的两步估计又可写作为

$$\boldsymbol{c}'\tilde{\beta}(\widehat{\boldsymbol{\sigma}}^2) = \boldsymbol{c}'(\mathbf{X}'\boldsymbol{\Sigma}^{-1}(\widehat{\boldsymbol{\sigma}}^2)\mathbf{X})^{-}\mathbf{X}'\boldsymbol{\Sigma}^{-1}(\widehat{\boldsymbol{\sigma}}^2)\boldsymbol{y}, \tag{9.6}$$

这里$\widehat{\boldsymbol{\sigma}}^2 = (\widehat{\sigma}_1^2, \cdots, \widehat{\sigma}_k^2)$, 其中$\widehat{\sigma}_i^2$ 为方差分量σ_i^2的一种估计.

定理9.1.1

对于混合效应模型(9.3), 假设$\boldsymbol{e}, \boldsymbol{\xi}$的联合分布关于原点对称. 设$\widehat{\boldsymbol{\sigma}}^2 = \widehat{\boldsymbol{\sigma}}^2(\boldsymbol{y})$是$\boldsymbol{\sigma}^2$的一个估计, 它是$\boldsymbol{y}$的偶函数且具有变换不变性. 对一切可估函数$\boldsymbol{c}'\beta$, 若$E(\boldsymbol{c}'\tilde{\beta}(\widehat{\boldsymbol{\sigma}}^2))$ 存在, 则两步估计$\boldsymbol{c}'\tilde{\beta}(\widehat{\boldsymbol{\sigma}}^2)$必为$\boldsymbol{c}'\beta$无偏估计.

固定效应的估计

- 两步估计　定理9.1.1证明其在许多情况下是无偏的：
  - 如当ξ, e 服从多元正态或各自的分布关于原点对称, 且相互独立时, 则ξ和e 的联合分布都关于原点对称.
  - σ^2 的常见估计：方差分析估计、极大似然估计、限制极大似然估计和MINQUE估计都是y的偶函数, 且变换不变.
- 优于LS 估计的简单估计　如Panel数据下的Between估计和Within估计(Baltagi, 1995); 谱分解估计(王松桂和尹素菊, 2002), 约简估计(Wu 和Wang, 2002).
- LS 估计　定理4.6.2证明：当$\mathbf{P_X}\Sigma$为对称阵, 则可估函数$c'\beta$的LS估计为BLU的. 如平衡数据下的随机效应模型的情形.

- 模型(9.1)下, 假设$\mathbf{D}$, $\mathbf{R}$都是已知, 则随机效应的ξ 的最佳线性无偏预测（BLUP）

$$\widehat{\xi} = \mathbf{D}\mathbf{U}'(\mathbf{U}\mathbf{D}\mathbf{U}' + \mathbf{R})^{-1}(\boldsymbol{y} - \mathbf{X}\beta^*), \tag{9.7}$$

用$\widehat{\mathbf{D}}$ 和$\widehat{\mathbf{R}}$ 代替$\mathbf{D}$, $\mathbf{R}$, 得可行的BLUP. 相关细节见第5章.

- $\widehat{\xi}$和β^* 为混合模型方程

$$\begin{pmatrix} \mathbf{X}'\mathbf{R}^{-1}\mathbf{X} & \mathbf{X}'\mathbf{R}^{-1}\mathbf{U} \\ \mathbf{U}'\mathbf{R}^{-1}\mathbf{X} & \mathbf{U}'\mathbf{R}^{-1}\mathbf{U} + \mathbf{D}^{-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \widetilde{\beta} \\ \widetilde{\xi} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{X}'\mathbf{R}^{-1}\boldsymbol{y} \\ \mathbf{U}'\mathbf{R}^{-1}\boldsymbol{y} \end{pmatrix} \tag{9.8}$$

的解（见定理9.4.1）

1. 方差分析估计

- 逐次将随机效应ξ_i看作固定效应, 按方差分析方法算出各效应对应的平方和(或均方):

$$Q_i = \boldsymbol{y}'(\mathbf{P}_{\mathbf{X},\mathbf{U}_1,\cdots,\mathbf{U}_i} - \mathbf{P}_{\mathbf{X},\mathbf{U}_1,\cdots,\mathbf{U}_i})\boldsymbol{y}, \quad i = 1, \cdots, k,$$

- 求这些平方和(或均方)的均值: $E(Q_i) = \sum_{j=i}^{k} \sigma_j^2 a_{ij}$.
- 解此方程组

$$Q_i = \sum_{j=i}^{k} \sigma_j^2 a_{ij}, \quad i = 1, \cdots, k,$$

得方差分量的估计$\hat{\sigma}_i^2$, $i = 1, \cdots, k$. (无偏但可能取负值)

2. 极大似然估计

假设$\xi_i \sim N(\mathbf{0},\ \sigma_i^2 \mathbf{I}_{q_i}),\ i = 1, \cdots, k$, 所有$\xi_i$都相互独立. 则

$$\boldsymbol{y} \sim N_n(\mathbf{0},\ \boldsymbol{\Sigma}(\boldsymbol{\sigma}^2)).$$

关于$\boldsymbol{\sigma}^2$极大化边缘对数似然函数

$$l(\boldsymbol{\sigma}^2|\boldsymbol{y}) = -\ln|\boldsymbol{\Sigma}(\boldsymbol{\sigma}^2)| - (\boldsymbol{y} - \mathsf{P}(\boldsymbol{\sigma}^2)\boldsymbol{y})'\boldsymbol{\Sigma}(\boldsymbol{\sigma}^2)^{-1}(\boldsymbol{y} - \mathsf{P}(\boldsymbol{\sigma}^2)\boldsymbol{y}).$$

得$\boldsymbol{\sigma}^2$的极大似然估计, 其中

$$\mathsf{P}(\boldsymbol{\sigma}^2)\boldsymbol{y} = \mathbf{X}\beta^*(\boldsymbol{\sigma}^2) = \mathbf{X}(\mathbf{X}'\boldsymbol{\Sigma}^{-1}(\boldsymbol{\sigma}^2)\mathbf{X})^{-}\mathbf{X}'\boldsymbol{\Sigma}^{-1}(\boldsymbol{\sigma}^2)\boldsymbol{y}$$

($\boldsymbol{\sigma}^2$的极大似然估计有偏, 通常需要迭代（如EM算法）得到)

3. 限制极大似然估计

记$\mathrm{rk}(\mathbf{X}) = r$, 假设$\boldsymbol{y} \sim N_n(\mathbf{0}, \boldsymbol{\Sigma}(\boldsymbol{\sigma}^2))$. $\mathbf{B}$为$n \times (n-r)$列满秩阵, 满足条件:

$$(\mathbf{I}_n - \mathsf{P}_{\mathbf{X}})\mathbf{B} = \mathbf{B}\mathbf{B}'\mathbf{X} = \mathbf{0}.$$

则$\boldsymbol{\sigma}^2$的限制极大似然估计就是基于

$$\mathbf{B}'\boldsymbol{y} \sim N(\mathbf{0}, \mathbf{B}'\boldsymbol{\Sigma}(\boldsymbol{\sigma}^2)\mathbf{B})$$

所得到$\boldsymbol{\sigma}^2$极大化似然估计.

注 $\boldsymbol{\sigma}^2$的限制极大似然估计与$\mathbf{B}$的选择无关;

注 $\boldsymbol{\sigma}^2$的限制极大似然方程的解无偏, 通常需要迭代求解

4. 最小范数准则

定义9.7.1

若线性函数$\varphi = \boldsymbol{c}'\boldsymbol{\sigma}^2$的估计$\boldsymbol{y}'\mathbf{A}\boldsymbol{y}$满足

$$\mathbf{A}\mathbf{X} = \mathbf{0},$$

$$\mathrm{tr}(\mathbf{A}\mathbf{V}_i) = c_i, \quad i = 1, \cdots, k,$$

且使范数$||\mathbf{U}'\mathbf{A}\mathbf{U} - \boldsymbol{\Delta}||$达到极小, 则称$\boldsymbol{y}'\mathbf{A}\boldsymbol{y}$为$\varphi = \boldsymbol{c}'\boldsymbol{\sigma}^2$的最小范数二次无偏估计(MINQUE).

- 不变性: $\boldsymbol{y}'\mathbf{A}\boldsymbol{y} = \boldsymbol{\xi}'\mathbf{A}\boldsymbol{\xi}$ (关于β不变);
- 无偏性: $E(\boldsymbol{y}'\mathbf{A}\boldsymbol{y}) = \varphi = \boldsymbol{c}'\boldsymbol{\sigma}^2$;
- 最小范数: 使范数$||\mathbf{U}'\mathbf{A}\mathbf{U} - \boldsymbol{\Delta}||$达到极小.

1. Wald精确检验

考虑混合效应模型

$$y = X\beta + U_1\xi_1 + U_2\xi_2 + e, \tag{9.9}$$

这里, $\xi_1 \sim N_s(\mathbf{0}, \sigma_1^2 \mathbf{I}_s)$, $\xi_2 \sim N_q(\mathbf{0}, \sigma_2^2 \mathbf{I}_q)$, $e \sim N_n(\mathbf{0}, \sigma_e^2 \mathbf{I}_n)$, 且它们彼此独立,

$$\mathrm{Cov}(y) = \sigma_1^2 U_1 U_1' + \sigma_2^2 U_2 U_2' + \sigma_e^2 \mathbf{I}_n.$$

- 构造检验统计量, 检验随机效应ξ_2的**的显著性:**

$$H_0: \quad \sigma_2^2 = 0 \longleftrightarrow H_1: \quad \sigma_2^2 \neq 0$$

精确检验

- 基于拟合常数的思想(方差分析法)
  - 将随机效应ξ_1和ξ_2暂视为固定效应, 模型拟合之后的残差平方和

$$\mathrm{SS}_e = \boldsymbol{y}'\boldsymbol{y} - \mathrm{RSS}(\beta,\ \xi_1,\ \xi_2) = \boldsymbol{y}'\left(\mathbf{I}_n - \mathbf{P}_{(\mathbf{X},\mathbf{U}_1,\mathbf{U}_2)}\right)\boldsymbol{y}.$$

  - 若$\sigma_2^2 = 0$, 则$\boldsymbol{y} = \mathbf{X}\beta + \mathbf{U}_1\xi_1 + \boldsymbol{e}$拟合之后的残差平方和

$$\mathrm{SS}_{e0} = \boldsymbol{y}'\boldsymbol{y} - \mathrm{RSS}(\beta,\ \xi_1) = \boldsymbol{y}'\left(\mathbf{I}_n - \mathbf{P}_{(\mathbf{X},\mathbf{U}_1)}\right)\boldsymbol{y}.$$

  - 当假设$\sigma_2^2 = 0$为真时, 则

$$F = \frac{(\mathrm{SS}_{e0} - \mathrm{SS}_e)/q_2}{\mathrm{SS}_e/q_1} = \frac{\left(\boldsymbol{y}'\left(\mathbf{P}_{(\mathbf{X},\mathbf{U}_1,\mathbf{U}_2)}\right)\boldsymbol{y} - \mathbf{P}_{(\mathbf{X},\mathbf{U}_1)}\right)/q_2}{\mathrm{SS}_e/q_1} \sim F_{q_2,\,q_1},$$

这里$q_1 = n - \mathrm{rk}(\mathbf{X},\mathbf{U}_1,\mathbf{U}_2)$, $q_2 = \mathrm{rk}(\mathbf{X},\mathbf{U}_1,\mathbf{U}_2) - \mathrm{rk}(\mathbf{X},\mathbf{U}_1)$.

2. Satterthwaite型近似检验

若矩阵谱分解：

$$\mathbf{N_X}\boldsymbol{\Sigma}\left(\boldsymbol{\sigma}^2\right)\mathbf{N_X} = \sum_{i=1}^{m} \lambda_i \mathbf{P}_i,$$

这里$\lambda_i = \boldsymbol{a}_i'\boldsymbol{\sigma}^2, i = 1, \cdots, m,$ 为$\mathbf{N_X}\boldsymbol{\Sigma}\left(\boldsymbol{\sigma}^2\right)\mathbf{N_X}$的不同的非零特征根. 则$S_i = \boldsymbol{y}'\mathbf{P}_i\boldsymbol{y} \sim \lambda_i\chi^2_{r_i}, i = 1, \cdots, m$ 相互独立.

- 若在$H_{0_i}: \sigma_i^2 = 0$成立时, $\lambda_i = c\lambda_j$ $(i \neq j, c$ 是一个已知常数）, 则存在精确检验，如在H_{0_i}下, 有

$$F = cS_i/r_i/(S_j/r_j) \sim F_{r_i, r_j}.$$

- 若在$H_{0_i}: \sigma_i^2 = 0$成立时, 所有$\lambda_1, \cdots, \lambda_m$ 没有相等的(或有常数倍关系), 则精确检验不存在.

2. Satterthwaite型近似检验

- Satterthwaite (1941, 1946) 提出的近似F 检验的检验统计量

$$F = \frac{S_1 + \cdots + S_s}{S_t + \cdots + S_g}. \tag{9.10}$$

- 在H_{0_i}下统计量F不再服从F分布, 但可用F_{f_1, f_2}来近似, 即

$$F \dot{\sim} F_{f_1, f_2},$$

其中自由度f_1和f_2可分别为

$$\hat{f}_1 = \frac{(S_1 + \cdots + S_s)^2}{S_1^2/r_1 + \cdots + S_s^2/r_s}, \quad \hat{f}_2 = \frac{(S_t + \cdots + S_g)^2}{S_t^2/r_t + \cdots + S_g^2/r_g}.$$

称这种近似为Satterthwaite近似, 称基于这种近似所得到的F 检验为Satterthwaite近似检验.

简单例子

- 不平衡数据下的单向分类随机模型

$$y_{ij} = \mu + \alpha_i + \varepsilon_{ij}, \quad i = 1, \cdots, a, \quad j = 1, \cdots, n_i, \tag{9.11}$$

这里μ是总体均值参数, α_i是因子A的第i个水平效应, ε_{ij}是随机误差. 假设所有的$\alpha_i \sim N(0, \sigma_\alpha^2)$, $\varepsilon_{ij} \sim N(0, \sigma_\varepsilon^2)$ 且都相互独立.

注1 在同一因子下的观测值的相关系数相等, 等于

$$\rho_{y_{ij}, y_{ij'}} = \frac{\sigma_\alpha^2}{\sigma_Y^2} = \frac{\sigma_\alpha^2}{\sigma_\varepsilon^2 + \sigma_\alpha^2} \triangleq \rho, \quad j \neq j',$$

称ρ为组内相关系数(intraclass correlation coefficient, ICC).

注2 若$\sigma_\alpha^2 = 0$, 则$\rho = 0$, 即表明随机因子A 对测量值的没有影响.

- 单向分类随机模型的另一种解释：

  记$\mu_i = \mu + \alpha_i$. 模型(9.11)可被改写为随机均值模型:

$$y_{ij} = \mu_i + \varepsilon_{ij}, \quad i = 1, \cdots, a, \quad j = 1, \cdots, n_i, \tag{9.12}$$

  其中$\mu_i \sim N(\mu, \sigma_\alpha^2)$, $i = 1, \cdots, a$, 相互独立, ε_{ij}是μ_i的测量误差.

  - 此时, 组内相关系数

$$\rho = \frac{\sigma_\alpha^2}{\sigma_Y^2} = \frac{\sigma_\alpha^2}{\sigma_\alpha^2 + \sigma_\varepsilon^2}$$

    又被称作是信度(reliability), 用于衡量和评价观察者间观测或重复测量结果的一致性程度.

  - 当$\sigma_\alpha^2 = 0$时, 信度ρ为零, 当σ_α^2相对于σ_ε^2越大时, 信度ρ越接近于1.

简单例子

- 针对单向分类随机模型，一个感兴趣的问题是检验假设

$$H_0:\ \sigma_\alpha^2 = 0 \longleftrightarrow H_1:\ \sigma_\alpha^2 > 0.$$

记$\boldsymbol{y} = (y_{11}, \cdots, y_{1n_1}, \cdots, y_{a1}, \cdots, y_{an_a})'$, $\boldsymbol{\varepsilon} = (\varepsilon_{11}, \cdots, \varepsilon_{1n_1}, \cdots, \varepsilon_{a1}, \cdots, \varepsilon_{an_a})'$, $n = \sum_{i=1}^{a} n_i$, $\boldsymbol{\alpha} = (\alpha_1, \cdots, \alpha_a)'$,

$$\mathbf{X} = \mathbf{1}_n, \quad \mathbf{U} = \bigoplus_{i=1}^{a} \mathbf{1}_{n_i} = \begin{pmatrix} \mathbf{1}_{n_1} & & \\ & \ddots & \\ & & \mathbf{1}_{n_a} \end{pmatrix}.$$

这里$\bigoplus$表示矩阵的直和符号. 于是$\boldsymbol{y}$的协方差阵为

$$\mathrm{Cov}(\boldsymbol{y}) = \boldsymbol{\Sigma} = \sigma_\alpha^2 \bigoplus_{i=1}^{a} n_i \bar{\mathbf{J}}_{n_i} + \sigma_\varepsilon^2 \mathbf{I}_n.$$

简单例子

- 回归平方和与残差平方和分别为

$$SS_\alpha = \boldsymbol{y}'(\mathbf{P}_{(\mathbf{X},\mathbf{U})} - \mathbf{P}_{\mathbf{X}})\boldsymbol{y} = \sum_{i=1}^{a} \frac{\bar{y}_{i\cdot}^2}{n_i} - \frac{\bar{y}_{\cdot\cdot}^2}{n},$$

$$SS_\varepsilon = \boldsymbol{y}'(\mathbf{I}_n - \mathbf{P}_{(\mathbf{X},\mathbf{U})})\boldsymbol{y} = \sum_{i=1}^{a}\sum_{j=1}^{n_i} y_{ij}^2 - \sum_{i=1}^{a} \frac{\bar{y}_{i\cdot}^2}{n_i},$$

这里$\bar{y}_{\cdot\cdot} = \sum_{i=1}^{a}\sum_{j=1}^{n_i} y_{ij}$, $\bar{y}_{i\cdot} = \sum_{j=1}^{n_i} y_{ij}/n_i$.

(1) $SS_\varepsilon \sim \sigma_\varepsilon^2 \chi_{n-a}^2$;

(2) SS_ε 与SS_α 相互独立.

(3) $SS_\alpha \sim \sum_{i=1}^{g} (\sigma_\varepsilon^2 + \lambda_i \sigma_\alpha^2)\chi_{r_i}^2$, 其中, λ_i为$\mathbf{U}\mathbf{U}'(\mathbf{P}_{(\mathbf{X},\mathbf{U})} - \mathbf{P}_{\mathbf{X}})$ 的非零特征根, r_i为特征根λ_i的重数.

简单例子

- Wald检验统计量有精确分布,

$$F = \frac{\mathrm{SS}_\alpha/(a-1)}{\mathrm{SS}_\varepsilon/(n-a)} \sim F_{a-1,n-a},$$

故H_{01}的拒绝域为$F \geq F_{a-1,n-a}(\alpha)$.
由Satterthwaite近似估算检验功效:

$$P(F \geq F_{a-1,n-a}(\alpha)) \approx P\left(F_{r(\theta),n-a} \geq \frac{(a-1)}{w(\theta)r(\theta)} F_{a-1,n-a}(\alpha)\right).$$

注 平衡数据下，即全部的$n_i = n$时, $\omega(\theta) = n\theta + 1, \quad r = a - 1.$

注 Satterthwaite近似的优点是相对简单, 但当样本容量极不平衡或线性组合系数出现负数时, 该检验往往是有偏检验, 此时需要慎用（Khuri et al.,1998).

混合效应模型

- 关于混合效应模型的更多内容, 感兴趣的读者可参阅

  1) 线性混合效应模型引论(吴密霞2013)

  2) Mixed Models: Theory and Applications with R (Demidenko 2013)

  3) Linear and Generalized Linear Mixed Models and Their Applications (Jiang 和Nguyen 2021)

- 混合效应模型的R语言程序包或函数:

  library(nlme) lme() ♯ 线性混合效应模型

  library(GLMMadaptive) ♯ 广义线性混合效应模型

  library(mgcv) ♯ 广义线性/可加混合效应模型

  https://bookdown.org/xiangyun/masr/mixed-effects-models.html