第3章　多元正态分布

吴密霞

北京工业大学统计与数据科学系

E-mail: *wumixia@bjut.edu.cn*

教材

- 吴密霞, 王松桂. 2024. 线性模型引论（第2版）, 科学出版社.

本章目录

均值向量与协方差阵

均值向量

设$\boldsymbol{X} = (X_1, \cdots, X_n)'$为$n \times 1$随机向量. 称

$$E(\boldsymbol{X}) = (EX_1, \cdots, EX_n)'$$

为X的均值向量.

定理3.1.1

设$\mathbf{A}$为$m \times n$非随机矩阵, $\boldsymbol{X}$和$\boldsymbol{b}$分别为$n \times 1$和$m \times 1$随机向量, 记$\boldsymbol{y} = \mathbf{A}\boldsymbol{X} + \boldsymbol{b}$, 则

$$E(\boldsymbol{y}) = \mathbf{A}E(\boldsymbol{X}) + E(\boldsymbol{b}).$$

协方差阵

维随机向量的协方差阵

设$\boldsymbol{X}$为$n \times 1$随机向量. 称

$$\mathrm{Cov}(\boldsymbol{X}) = E[(\boldsymbol{X} - E(\boldsymbol{X}))(\boldsymbol{X} - E(\boldsymbol{X}))'] = \boldsymbol{\Sigma} = (\sigma_{ij})$$

为随机向量$\boldsymbol{X}$的协方差阵.

- $\sigma_{ij} = \mathrm{Cov}(X_i, X_j) = E[(X_i - EX_i)(X_j - EX_j)]$, 特别地, $\sigma_{ii} = \mathrm{Var}(X_i)$. 若$\sigma_{ij} = 0$, 则称$\boldsymbol{X}$的相应分量$X_i$与$X_j$不相关.
- $\mathrm{trCov}(\boldsymbol{X}) = \sum_{i=1}^{n} \mathrm{Var}(X_i)$, 这里$\mathrm{tr}\mathbf{A}$表示方阵$\mathbf{A}$的迹, 即对角元素之和.

协方差阵

定理3.1.3

设X为$n \times 1$随机向量, 则它的协方差阵$\mathrm{Cov}(X)$必为半正定的对称阵, 记作$\boldsymbol{\Sigma} \geq \mathbf{0}$.

定理3.1.3

th3.1.3 设$\mathbf{A}$为$m \times n$阵, X为$n \times 1$ 随机向量, $Y = \mathbf{A}X$, 则$\mathrm{Cov}(Y) = \mathbf{A}\mathrm{Cov}(X)\mathbf{A}'$.

定理3.1.4

设X和Y分别为$n \times 1$, $m \times 1$随机向量, $\mathbf{A}$ 和$\mathbf{B}$ 分别为$p \times n$, $q \times m$非随机矩阵, 则

$$\mathrm{Cov}(\mathbf{A}X, \mathbf{B}Y) = \mathbf{A}\mathrm{Cov}(X, Y)\mathbf{B}'.$$

随机向量的二次型

假设$\boldsymbol{X} = (X_1, \cdots, X_n)'$ 为$n \times 1$ 随机向量, $\mathbf{A}$为$n \times n$ 对称阵, 则称随机变量

$$\boldsymbol{X}'\mathbf{A}\boldsymbol{X} = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} a_{ij}X_iX_j$$

为X的二次型.

定理3.2.1

设$E(\boldsymbol{X}) = \boldsymbol{\mu}, \mathrm{Cov}(\boldsymbol{X}) = \boldsymbol{\Sigma}$, 则$E(\boldsymbol{X}'\mathbf{A}\boldsymbol{X}) = \boldsymbol{\mu}'\mathbf{A}\boldsymbol{\mu} + \mathrm{tr}(\mathbf{A}\boldsymbol{\Sigma})$.

- 当$\mathbf{A}\boldsymbol{\mu} = \mathbf{0}$时, $E(\boldsymbol{X}'\mathbf{A}\boldsymbol{X}) = \mathrm{tr}(\mathbf{A}\boldsymbol{\Sigma})$.

定理3.2.2

设随机变量$X_1,\cdots,X_n$相互独立，$E(X_i)=\mu_i$，$\mathrm{Var}(X_i)=\sigma^2$，$m_r=E(X_i-\mu_i)^r$，$r=3,4$. $\mathbf{A}=(a_{ij})_{n\times n}$为对称阵. 记$\boldsymbol{X}=(X_1,\cdots,X_n)'$，$\boldsymbol{\mu}=(\mu_1,\cdots,\mu_n)'$，则

$$\mathrm{Var}(\boldsymbol{X}'\mathbf{A}\boldsymbol{X})=(m_4-3\sigma^4)\boldsymbol{a}'\boldsymbol{a}+2\sigma^4\mathrm{tr}(\mathbf{A}^2)+4\sigma^2\boldsymbol{\mu}'\mathbf{A}^2\boldsymbol{\mu}+4m_3\boldsymbol{\mu}'\mathbf{A}\boldsymbol{a},$$

其中$\boldsymbol{a}=(a_{11},\cdots,a_{nn})'$，即$\mathbf{A}$的对角元组成的列向量.

- 当$\mathbf{A}\boldsymbol{\mu}_i=\mathbf{0}$时，$\mathrm{Var}(\boldsymbol{X}'\mathbf{A}\boldsymbol{X})=(m_4-3\sigma^4)\boldsymbol{a}'\boldsymbol{a}+2\sigma^4\mathrm{tr}(\mathbf{A}^2)$.
- 当$\mathbf{A}\boldsymbol{\mu}_i=\mathbf{0}$ 且$X_i\sim N(\mu_i,\sigma^2)$时，$\mathrm{Var}(\boldsymbol{X}'\mathbf{A}\boldsymbol{X})=2\sigma^4\mathrm{tr}(\mathbf{A}^2)$.

正态随机向量

一元正态分布　若随机变量X具有密度函数

$$f(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}e^{-\frac{1}{2\sigma^2}(x-\mu)^2},\quad -\infty<x<+\infty,$$

则称$\boldsymbol{x}$为具有均值$\boldsymbol{\mu}$, 方差σ^2的正态随机变量, 记为$N(\mu,\sigma^2)$.

定义3.3.1　多元正态分布

设n维随机向量$\boldsymbol{X}=(X_1,\cdots,X_n)'$具有密度函数

$$f(\boldsymbol{x})=\frac{1}{(2\pi)^{n/2}|\boldsymbol{\Sigma}|^{1/2}}\exp\left\{-\frac{1}{2}(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{\mu})'\boldsymbol{\Sigma}^{-1}(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{\mu})\right\}, \tag{3.1}$$

其中$\boldsymbol{x}=(x_1,\cdots,x_n)'$, $-\infty<x_i<+\infty$, $i=1,\cdots,n$, $\boldsymbol{\mu}=(\mu_1,\cdots,\mu_n)'$, $\boldsymbol{\Sigma}>\boldsymbol{0}$, 则称$\boldsymbol{X}$为$n$维正态随机向量, 记为$N_n(\boldsymbol{\mu},\boldsymbol{\Sigma})$.

我国统计学先驱许宝騄先生提出另一种定义.

定义3.3.2

设X为n维随机向量. 若存在$n \times r$的列满秩矩阵$\mathbf{A}$, 使得

$$\boldsymbol{X}=\mathbf{A}\boldsymbol{u}+\boldsymbol{\mu},$$

这里$\boldsymbol{u} = (u_1, \cdots, u_r)'$, $u_i \sim N(0,1)$且相互独立, $\boldsymbol{\mu}$为$n \times 1$非随机向量, 则称X服从均值为$\boldsymbol{\mu}$、协方差阵为$\boldsymbol{\Sigma} = \mathbf{A}\mathbf{A}'$的多元正态向量, 记为$\boldsymbol{X} \sim N_n(\boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\Sigma})$.

注 以上定义允许Σ为半正定. 如果$\Sigma > 0$, 则两定义等价.

注 定义3.3.1是用概率密度函数定义分布的, 需假设$\boldsymbol{\Sigma} > \mathbf{0}$.

- 应用定义.3.2, 很容易证明下面的定理.

定理3.3.1

设$X \sim N_n(\boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\Sigma})$, $\boldsymbol{\Sigma} \geq \mathbf{0}$, $\mathbf{B}$为$m \times n$任意实矩阵, 则$\boldsymbol{y} = \mathbf{B}\boldsymbol{X} \sim N_m(\mathbf{B}\boldsymbol{\mu}, \mathbf{B}\boldsymbol{\Sigma}\mathbf{B}')$.

推论3.3.1

设$X \sim N_n(\boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\Sigma}), \boldsymbol{\Sigma} > \mathbf{0}$, 则$\boldsymbol{y} = \boldsymbol{\Sigma}^{-\frac{1}{2}}\boldsymbol{X} \sim N_n(\boldsymbol{\Sigma}^{-\frac{1}{2}}\boldsymbol{\mu}, \mathbf{I}_n)$.

推论3.3.2

设$X \sim N_n(\boldsymbol{\mu}, \sigma^2\mathbf{I}_n)$, $\mathbf{Q}$为$n \times n$正交阵, 则$\mathbf{Q}\boldsymbol{X} \sim N_n(\mathbf{Q}\boldsymbol{\mu}, \sigma^2\mathbf{I}_n)$.

定理3.3.2

设$\boldsymbol{X} \sim N_n(\boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\Sigma})$, 则

(1)当$\boldsymbol{\Sigma} > \boldsymbol{0}$时, $\boldsymbol{X}$具有密度(3.1);

(2)当$\mathrm{rk}(\boldsymbol{\Sigma}) = r < n$时, $\boldsymbol{X} - \boldsymbol{\mu}$以概率为1落在子空间$\mathcal{M}(\boldsymbol{\Sigma})$内.

定理3.3.3

$\boldsymbol{X} \sim N_n(\boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\Sigma})$当且仅当它的特征函数为

$$\varphi_{\boldsymbol{x}}(\boldsymbol{t}) = \exp\left\{i\boldsymbol{t}'\boldsymbol{\mu} - \frac{\boldsymbol{t}'\boldsymbol{\Sigma}\boldsymbol{t}}{2}\right\}, \quad \boldsymbol{t} \in \mathbb{R}^n.$$

定理3.3.4

具有均值向量μ, 协方差阵为Σ的随机向量X服从多元正态分布当且仅当对任意实向量$\boldsymbol{c}$, 都有 $\boldsymbol{c}'\boldsymbol{X} \sim N(\boldsymbol{c}'\boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{c}'\boldsymbol{\Sigma}\boldsymbol{c})$, 这里$\boldsymbol{\Sigma} \geq \boldsymbol{0}$.

推论3.3.3

设$\boldsymbol{X} = (X_1, \cdots, X_n)' \sim N_n(\boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\Sigma})$, $\boldsymbol{\mu} = (\mu_1, \cdots, \mu_n)$, $\boldsymbol{\Sigma} = (\sigma_{ij})$, 则 $X_i \sim N(\mu_i, \sigma_{ii})$, $i = 1, \cdots, n$.

注 联合分布正态则边缘分布正态, 反之不成立. 如(X, Y)的联合密度函数:

$$f(x,y) = \frac{1}{2\pi}\left[1 - \frac{xy}{(x^2+1)(y^2+1)}\right]\exp\left\{-\frac{1}{2}(x^2+y^2)\right\}, \quad -\infty < x, y < +\infty.$$

显然这不是二元正态分布的密度函数, 但可验证X和Y的边缘分布都为$N(0,1)$.

- 将$\boldsymbol{X}, \boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\Sigma}$ 做如下分块

$$\boldsymbol{X} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{X}_1 \\ \boldsymbol{X}_2 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{\mu} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{\mu}_1 \\ \boldsymbol{\mu}_2 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{\Sigma} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{\Sigma}_{11} & \boldsymbol{\Sigma}_{12} \\ \boldsymbol{\Sigma}_{21} & \boldsymbol{\Sigma}_{22} \end{pmatrix}, \qquad (3.2)$$

这里$\boldsymbol{X}_1, \boldsymbol{\mu}_1$皆为$m \times 1$向量, $\boldsymbol{\Sigma}_{11}$为$m \times m$矩阵, $\boldsymbol{\Sigma} \geq \mathbf{0}$.

定理3.3.5

设$\boldsymbol{X} \sim N_n(\boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\Sigma})$, 则$\boldsymbol{X}_1 \sim N_m(\boldsymbol{\mu}_1, \boldsymbol{\Sigma}_{11})$, $\boldsymbol{X}_2 \sim N_{n-m}(\boldsymbol{\mu}_2, \boldsymbol{\Sigma}_{22})$.

证明（应用特征函数证明） $\boldsymbol{X}_1$的特征函数为

$$\varphi_{x_1}(t) = \varphi_{\boldsymbol{x}}(t_1, \cdots, t_m, 0, \cdots, 0) = \exp\left\{ i\boldsymbol{t}'\boldsymbol{\mu}_1 - \frac{\boldsymbol{t}'\boldsymbol{\Sigma}_{11}\boldsymbol{t}}{2} \right\}.$$

定理3.3.6

设$X \sim N_n(\boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\Sigma})$, 则$X_1$和$X_2$独立当且仅当$\boldsymbol{\Sigma}_{12} = \mathbf{0}$.

定理3.3.7

设$X \sim N_n(\boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\Sigma})$, 对$X, \boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\Sigma}$作如(3.2)的分块, 则

$$\boldsymbol{X}_2|\boldsymbol{X}_1 = \boldsymbol{x}_1 \sim N_{n-m}(\boldsymbol{\mu}_2 + \boldsymbol{\Sigma}_{21}\boldsymbol{\Sigma}_{11}^{-}(\boldsymbol{x}_1 - \boldsymbol{\mu}_1),\ \boldsymbol{\Sigma}_{22.1}),$$

$$\boldsymbol{X}_1|\boldsymbol{X}_2 = \boldsymbol{x}_2 \sim N_{n-m}(\boldsymbol{\mu}_1 + \boldsymbol{\Sigma}_{12}\boldsymbol{\Sigma}_{22}^{-}(\boldsymbol{x}_2 - \boldsymbol{\mu}_2),\ \boldsymbol{\Sigma}_{11.2}),$$

这里

$$\boldsymbol{\Sigma}_{22.1} = \boldsymbol{\Sigma}_{22} - \boldsymbol{\Sigma}_{21}\boldsymbol{\Sigma}_{11}^{-}\boldsymbol{\Sigma}_{12}, \quad \boldsymbol{\Sigma}_{11.2} = \boldsymbol{\Sigma}_{11} - \boldsymbol{\Sigma}_{12}\boldsymbol{\Sigma}_{22}^{-}\boldsymbol{\Sigma}_{21}.$$

证明 令

$$\mathbf{C} = \begin{pmatrix} \mathbf{I}_m & \mathbf{0} \\ -\mathbf{\Sigma}_{21}\mathbf{\Sigma}_{11}^{-} & \mathbf{I}_{n-m} \end{pmatrix}.$$

则

$$\boldsymbol{Y} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{Y}_1 \\ \boldsymbol{Y}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{X}_1 \\ \boldsymbol{X}_2 - \mathbf{\Sigma}_{21}\mathbf{\Sigma}_{11}^{-}\boldsymbol{X}_1 \end{pmatrix} = \mathbf{C}\boldsymbol{X} \sim N_n(\mathbf{C}\boldsymbol{\mu}, \mathbf{C}\mathbf{\Sigma}\mathbf{C}'),$$

利用(2.3.11)和(2.3.12)得

$$\mathbf{C}\boldsymbol{\mu} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{\mu}_1 \\ \boldsymbol{\mu}_2 - \mathbf{\Sigma}_{21}\mathbf{\Sigma}_{11}^{-}\boldsymbol{\mu}_1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{C}\mathbf{\Sigma}\mathbf{C}' = \begin{pmatrix} \mathbf{\Sigma}_{11} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{\Sigma}_{22.1} \end{pmatrix}$$

于是$\boldsymbol{X}_1 \sim N_m(\boldsymbol{\mu}_1,\ \boldsymbol{\Sigma}_{11})$,

$$\boldsymbol{X}_2 - \boldsymbol{\Sigma}_{21}\boldsymbol{\Sigma}_{11}^{-}\boldsymbol{X}_1 \sim N_{n-m}(\boldsymbol{\mu}_2 - \boldsymbol{\Sigma}_{21}\boldsymbol{\Sigma}_{11}^{-}\boldsymbol{\mu}_1,\ \boldsymbol{\Sigma}_{22.1}),$$

且二者独立. 故给定$\boldsymbol{X}_1 = \boldsymbol{x}_1$, $\boldsymbol{X}_2$ 的条件分布

$$\boldsymbol{X}_2 \sim N_{n-m}(\boldsymbol{\mu}_2 + \boldsymbol{\Sigma}_{21}\boldsymbol{\Sigma}_{11}^{-}(\boldsymbol{x}_1 - \boldsymbol{\mu}_1), \boldsymbol{\Sigma}_{22.1}).$$

同理可证给定$\boldsymbol{X}_2 = \boldsymbol{x}_2$, $\boldsymbol{X}_1$ 的条件分布

$$\boldsymbol{X}_1|\boldsymbol{X}_2 = \boldsymbol{x}_2 \sim N_{n-m}(\boldsymbol{\mu}_1 + \boldsymbol{\Sigma}_{12}\boldsymbol{\Sigma}_{22}^{-}(\boldsymbol{x}_2 - \boldsymbol{\mu}_2),\ \boldsymbol{\Sigma}_{11.2}),$$

定理证毕.

正态向量的二次型

定理3.4.1

设$X \sim N_n(\boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\Sigma})$, $\mathbf{A}_{n\times n}$对称, 则$\mathrm{Var}(X'\mathbf{A}X) = 2\mathrm{tr}(\mathbf{A}\boldsymbol{\Sigma})^2 + 4\boldsymbol{\mu}'\mathbf{A}\boldsymbol{\Sigma}\mathbf{A}\boldsymbol{\mu}$.

定义3.4.1

设$X \sim N_n(\boldsymbol{\mu}, \mathbf{I}_n)$. 随机变量$Y = X'X$的分布称为自由度为$n$, 非中心参数为$\lambda = \boldsymbol{\mu}'\boldsymbol{\mu}$的$\chi^2$分布, 记为$Y \sim \chi^2_{n,\lambda}$. 当$\lambda = 0$时, 称$Y$的分布为中心$\chi^2$分布, 记为$Y \sim \chi^2_n$.

- 不妨假设$\boldsymbol{\Sigma} > \mathbf{0}$. 考虑$X'\mathbf{A}X$与$\chi^2$分布的关系.

定理3.4.3

设$X \sim N_n(\boldsymbol{\mu}, \mathbf{I}_n)$, $\mathbf{A}$ 对称, 则$X'\mathbf{A}X \sim \chi^2_{r,\boldsymbol{\mu}'\mathbf{A}\boldsymbol{\mu}} \Longleftrightarrow \mathbf{A}$ 幂等, $\mathrm{rk}(\mathbf{A}) = r$.

- $X'\mathbf{A}X \sim \chi^2_k \Longleftrightarrow \mathbf{A}$ 幂等, $\mathrm{rk}(\mathbf{A}) = k$, $\mathbf{A}\boldsymbol{\mu} = \mathbf{0}$.
- 若$\boldsymbol{\mu} = \mathbf{0}$, 则$X'\mathbf{A}X \sim \chi^2_k \Longleftrightarrow \mathbf{A}$ 幂等且$\mathrm{rk}(\mathbf{A}) = k$.

推论3.4.3

若$X \sim N_n(\boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\Sigma})$, $\boldsymbol{\Sigma} > \mathbf{0}$, 则

$$X'\mathbf{A}X \sim \chi^2_{k;\lambda} \Longleftrightarrow \mathbf{A}\boldsymbol{\Sigma}\mathbf{A} = \mathbf{A},$$

这里$\lambda = \boldsymbol{\mu}'\mathbf{A}\boldsymbol{\mu}$.

证 令$Y = \boldsymbol{\Sigma}^{-1/2}X \sim N_n(\boldsymbol{\Sigma}^{-1/2}\boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{I}_n)$. 应用定理3.4.3得证.

定理3.4.4

设$X \sim N_n(\boldsymbol{\mu}, \mathbf{I})$, 若

$$X'\mathbf{A}X = X'\mathbf{A}_1X + X'\mathbf{A}_2X \sim \chi^2_{r;\lambda}, \quad X'\mathbf{A}_1X \sim \chi^2_{s;\lambda_1},$$

其中$\mathbf{A}_2 \geq \mathbf{0}$, $\lambda = \boldsymbol{\mu}'\mathbf{A}\boldsymbol{\mu}$, $\lambda_1 = \boldsymbol{\mu}'\mathbf{A}_1\boldsymbol{\mu}$, 则

$$X'\mathbf{A}_2X \sim \chi^2_{r-s;\lambda_2}, \quad \mathbf{A}_1\mathbf{A}_2 = \mathbf{0},$$

且$X'\mathbf{A}_1X$ 和$X'\mathbf{A}_2X$相互独立, 这里$\lambda_2 = \boldsymbol{\mu}'\mathbf{A}_2\boldsymbol{\mu}$.

证明思路：$X'\mathbf{A}_1X$ 和$X'\mathbf{A}_2X$ 表达成独立正态变量的平方和形式

$$X'\mathbf{A}_1X = \sum_{i=1}^{s} Y_i^2, \quad X'\mathbf{A}_2X = \sum_{i=s+1}^{r} Y_i^2.$$

这里$Y_1, \cdots, Y_n$相互独立的正态变量.

证明 由定理3.4.3知：$X'\mathbf{A}X \sim \chi^2_{r;\lambda} \Longrightarrow \mathbf{A}$ 对称幂等, $\mathrm{rk}(\mathbf{A}) = r$. 故存在正交方阵**P**, 使得

$$\mathbf{P}'\mathbf{A}\mathbf{P} = \begin{pmatrix} \mathbf{I}_r & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{pmatrix}.$$

因$X'\mathbf{A}_1X \sim \chi^2_{s;\lambda_1}$, 故$\mathbf{A}_1$也幂等. 又因$\mathbf{A}_2 \geq \mathbf{0}$, 故$\mathbf{A} \geq \mathbf{A}_1, \mathbf{A} \geq \mathbf{A}_2$ (幂等一定半正定),

$$\mathbf{P}'\mathbf{A}_1\mathbf{P} = \begin{pmatrix} \mathbf{B}_1 & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{pmatrix}, \quad \mathbf{P}'\mathbf{A}_2\mathbf{P} = \begin{pmatrix} \mathbf{B}_2 & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{pmatrix}, \quad \mathbf{B}_i: \ r \times r.$$

由$\mathbf{A}_1^2 = \mathbf{A}_1$易证$\mathbf{B}_1^2 = \mathbf{B}_1$. 故存在正交阵$\mathbf{Q}_{r\times r}$, 使得

由$\mathbf{A}_1^2=\mathbf{A}_1$易证$\mathbf{B}_1^2=\mathbf{B}_1$. 故存在正交阵$\mathbf{Q}_{r\times r}$, 使得

$$\mathbf{Q}'\mathbf{B}_1\mathbf{Q}=\begin{pmatrix}\mathbf{I}_s & \mathbf{0}\\ \mathbf{0} & \mathbf{0}\end{pmatrix}.$$

记

$$\mathbf{S}'=\begin{pmatrix}\mathbf{Q}' & \mathbf{0}\\ \mathbf{0} & \mathbf{I}_{n-r}\end{pmatrix}\mathbf{P}',$$

则$\mathbf{S}$为正交阵, 且使$\mathbf{S}'\mathbf{A}\mathbf{S}=\mathbf{S}'\mathbf{A}_1\mathbf{S}+\mathbf{S}'\mathbf{A}_2\mathbf{S}$ 形为

$$\begin{pmatrix}\mathbf{I}_s & \mathbf{0} & \mathbf{0}\\ \mathbf{0} & \mathbf{I}_{r-s} & \mathbf{0}\\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\mathbf{I}_s & \mathbf{0} & \mathbf{0}\\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0}\\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0}\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}\mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0}\\ \mathbf{0} & \mathbf{I}_{r-s} & \mathbf{0}\\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0}\end{pmatrix}.$$

正态向量的二次型

作变换$\boldsymbol{Y}=\mathbf{S}'\boldsymbol{X}$. 由依定理3.3.1, 有$\boldsymbol{Y}\sim N_n(\mathbf{S}'\boldsymbol{\mu},\mathbf{I}_n)$. 于是

$$\boldsymbol{X}'\mathbf{A}\boldsymbol{X}=\boldsymbol{Y}'\mathbf{S}'\mathbf{A}\mathbf{S}\boldsymbol{Y}=\sum_{i=1}^{r}Y_i^2,$$

$$\boldsymbol{X}'\mathbf{A}_1\boldsymbol{X}=\boldsymbol{Y}'\mathbf{S}'\mathbf{A}_1\mathbf{S}\boldsymbol{Y}=\sum_{i=1}^{s}Y_i^2,\quad \boldsymbol{X}'\mathbf{A}_2\boldsymbol{X}=\boldsymbol{Y}'\mathbf{S}'\mathbf{A}_2\mathbf{S}\boldsymbol{Y}=\sum_{i=s+1}^{r}Y_i^2.$$

因为$Y_1,\cdots,Y_n$相互独立, 所以$\boldsymbol{X}'\mathbf{A}_1\boldsymbol{X}$与$\boldsymbol{X}'\mathbf{A}_2\boldsymbol{X}$相互独立. 再依定义, $\boldsymbol{X}'\mathbf{A}_2\boldsymbol{X}\sim\chi^2_{r-s;\lambda_2}$,又

$$\mathbf{A}_1\mathbf{A}_2=\mathbf{S}\begin{pmatrix}\mathbf{I}_s & \mathbf{0} & \mathbf{0}\\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0}\\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0}\end{pmatrix}\mathbf{S}'\mathbf{S}\begin{pmatrix}\mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0}\\ \mathbf{0} & \mathbf{I}_{r-s} & \mathbf{0}\\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0}\end{pmatrix}\mathbf{S}'=\mathbf{0}.$$

定理证毕.

推论3.4.4

设$X \sim N_n(\boldsymbol{\mu}, \mathbf{I}_n)$, $\mathbf{A}_1, \mathbf{A}_2$对称, $X'\mathbf{A}_1X$和$X'\mathbf{A}_2X$ 都服从χ^2分布, 则它们相互独立$\Longleftrightarrow \mathbf{A}_1\mathbf{A}_2 = \mathbf{0}$.

上面两个定理很容易推广到$\mathrm{Cov}(X) = \boldsymbol{\Sigma} > \mathbf{0}$的情形. 只需作如下变换:

$$Y = \boldsymbol{\Sigma}^{-\frac{1}{2}}X \sim N_n\left(\boldsymbol{\Sigma}^{-\frac{1}{2}}\boldsymbol{\mu}, \mathbf{I}_n\right)$$

$$X'\mathbf{A}_iX = Y'\left(\boldsymbol{\Sigma}^{\frac{1}{2}}\mathbf{A}_i\boldsymbol{\Sigma}^{\frac{1}{2}}\right)Y$$

正态向量的二次型

推论3.4.5

设$X \sim N_n(\boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\Sigma})$, $\boldsymbol{\Sigma} > 0$, $X'\mathbf{A}X = X'\mathbf{A}_1X + X'\mathbf{A}_2X \sim \chi^2_{r,\lambda_1}$, $X'\mathbf{A}_1X \sim \chi^2_{s,\ \lambda_2}$, $\mathbf{A}_2 \geq \mathbf{0}$, 则

(1) $X'\mathbf{A}_2X \sim \chi^2_{r-s,\lambda_3}$;

(2) $X'\mathbf{A}_1X$与$X'\mathbf{A}_2X$相互独立;

(3) $\mathbf{A}_1\boldsymbol{\Sigma}\mathbf{A}_2 = \mathbf{0}$;

其中λ_i, $i = 1, 2, 3$为非中心参数, 不再精确写出.

推论3.4.6

设$X \sim N_n(\boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\Sigma}), \boldsymbol{\Sigma} > \mathbf{0}, \mathbf{A}_1, \mathbf{A}_2$对称,$X'\mathbf{A}_1X$与$X'\mathbf{A}_2X$ 都服从χ^2分布.

则它们相互独立$\Longleftrightarrow \mathbf{A}_1\boldsymbol{\Sigma}\mathbf{A}_2 = \mathbf{0}$.

定理3.5.1

设$X \sim N_n(\boldsymbol{\mu}, \mathbf{I})$, $\mathbf{A}$为$n \times n$对称阵, $\mathbf{C}$为$m \times n$矩阵. 若

$$\mathbf{CA} = \mathbf{0},$$

则$\mathbf{C}X$和$X'\mathbf{A}X$相互独立.

推论3.5.1

设$X \sim N_n(\boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\Sigma})$, $\boldsymbol{\Sigma} > \mathbf{0}$, $\mathbf{A}_{n\times n}$为对称阵. 若

$$\mathbf{C}\boldsymbol{\Sigma}\mathbf{A} = \mathbf{0},$$

则$\mathbf{C}X$与$X'\mathbf{A}X$相互独立.

正态向量的二次型与线性型的独立性

定理3.5.2

设$X \sim N_n(\boldsymbol{\mu}, \mathbf{I})$, $\mathbf{A}$和$\mathbf{B}$皆为$n \times n$的对称阵, 若

$$\mathbf{AB} = \mathbf{0},$$

则$X'\mathbf{A}X$与$X'\mathbf{B}X$相互独立.

推论3.5.2

设$X \sim N_n(\boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\Sigma}), \boldsymbol{\Sigma} > \mathbf{0}$, $\mathbf{A}$和$\mathbf{B}$皆为$n \times n$的对称阵. 若

$$\mathbf{A\Sigma B} = \mathbf{0},$$

则$X'\mathbf{A}X$ 与$X'\mathbf{B}X$ 相互独立.